Segundo Parcial - ANÁLISIS II (C) - Curso de Verano - 18/3/06

Ricardo Testoni

Nota: Por supuesto que las soluciones que se dan aquí, no son las únicas posibles.

Ejercicio 1: Hallar las ecuaciones de todos los planos tangentes a la superficie

$$S = \{(x, y, z) : x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21\}$$

y que sean perpendiculares a la recta $L : \lambda(1, 4, 6) + (2, 0, 6)$.

Solución:

S es la superficie de niverl 21 de la función diferenciable $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$. Sabemos que el gradiente de f en cada punto de S será perpendicular a la superficie S. Luego la normal al plano tangente en cada punto $(x_0, y_0, z_0) \in S$ será $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ siempre y cuando no sea nulo. Por otro lado, para que el plano sea perpendicular a la recta L debe ser

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \alpha(1, 4, 6)$$

Luego debemos resolver

$$\begin{cases} 2x_0 = \alpha \\ 4y_0 = 4\alpha \\ 6z_0 = 6\alpha \\ x_0^2 + 2y_0^2 + 3z_0^2 = 21 \end{cases}$$

Resolviendo tenemos que $\alpha = 2$ o $\alpha = -2$ lo que nos da dos puntos de tangencia: $(x_0, y_0, z_0) = (1, 2, 2)$ y $(x_0, y_0, z_0) = (-1, -2, -2)$.

Los planos tangentes son:

$$(1, 4, 6) \cdot ((x, y, z) - (1, 2, 2)) = 0$$

y

$$(1, 4, 6) \cdot ((x, y, z) - (-1, -2, -2)) = 0.$$

Ejercicio 2:

Hallar los extremos absolutos de $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy$ en el conjunto

$$A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

¿Hay otros extremos en A?

Solución:

Primero busco los puntos críticos en el interior de A:

Como f es diferecialble sólo hay que resolver $\nabla f(x, y) = (0, 0)$. Esto es

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

cuya única soloución es $(x, y) = (0, 0)$.

Ahora busco en el borde de A, esto es cuando $g(x, y) = x^2 + y^2 = 1$. Restringiendo f a este conjunto queda $f(x, y) = 1 + xy$ (también se puede trabajar con $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy$ pero son más cuentas...). Como f y g son C^1 y $\nabla g(x, y) = (2x, 2y) \neq (0, 0)$ para $x^2 + y^2 =$

1, podemos aplicar Multiplicadores de Lagrange: $\begin{cases} y = 2x\lambda \\ x = 2y\lambda \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ que da los siguientes posibles extremos: $\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}$.

Como f es continua y A es compacto necesariamente hay máximo y mínimo absolutos, para encotrarlos basta evaluar f en cada uno de los candidatos a extremos obteniéndose que en $(0,0)$ se alcanza el mínimo absoluto y en $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ y $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ se alcanza el máximo absoluto.

Los puntos $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ no son extremos (relativos). En efecto, si restringimos f al borde deben ser mínimos (como el borde es compacto entonces f alcanza máximo y mínimo absolutos en el borde, y como $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ y $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ son máximos entonces el mínimo debe ser alguno de los otros puntos críticos que da Lagrange, pero como $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ entonces ambos son mínimos restringidos al borde (también sale si paremetrizamos el borde pero hay que hacer cuentas...)) y si se consideran los valores que toma f sobre la recta $y = -x$ dentro de A es fácil ver que son menores que $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ y que $f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$.

Ejercicio 3:

Calcular la siguiente integral iterada:

$$\int_0^1 \left(\int_{x^3}^1 x^2 e^{-y^2} dy \right) dx.$$

Solución:

Sea $D = \left\{ (x,y) : 0 \leq x \leq 1, x^3 \leq y \leq 1 \right\} = \left\{ (x,y) : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq \sqrt[3]{y} \right\}$. Notar que D es una región de tipo 3.

Como la función $f(x,y) = x^2 e^{-y^2}$ es continua podemos aplicar Fubini:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\int_{x^3}^1 x^2 e^{-y^2} dy \right) dx &= \iint_D x^2 e^{-y^2} dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt[3]{y}} x^2 e^{-y^2} dx \right) dy \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 y e^{-y^2} dy = -\frac{1}{6} e^{-y^2} \Big|_0^1 = \frac{1}{6} \left(1 - e^{-1} \right). \end{aligned}$$

Ejercicio 4:

Hallar el volumen comprendido por las gráficas de $z = x^2 + y^2$ y $z = \frac{x^2+y^2}{2} + 1$.

Solución:

Graficando y resolviendo $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = \frac{x^2+y^2}{2} + 1 \end{cases}$ se tiene que debemos integrar en el círculo D de centro $(0,0)$ y radio $\sqrt{2}$ la función $\frac{x^2+y^2}{2} + 1 - \left(x^2 + y^2 \right) = 1 - \frac{x^2+y^2}{2}$.Utilizando coordenadas polares:

$$\iint_D 1 - \frac{x^2+y^2}{2} dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{r^2}{2} \right) r dr d\theta = \pi.$$